CORRIGE DU BREVET BLANC DE JANVIER 2010

PARTIE NUMERIQUE (12 points)

Exercice 1

1. $A = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{7}{9} = \frac{5}{6} + \frac{5 \times 7}{6 \times 9} = \frac{5 \times 9}{6 \times 9} + \frac{5 \times 7}{6 \times 9} = \frac{45}{54} + \frac{35}{54} = \frac{80}{54} = \frac{40 \times 2}{27 \times 2} = \frac{40}{27}$

2. $B = \frac{15 \times 10^3 \times 27}{9 \times 10^8} = \frac{3 \times 5 \times 9 \times 3}{9} \times \frac{10^3}{10^8} = 45 \times 10^{-5} = 4{,}5 \times 10^{-4}$

Exercice 2

1. a) Il y a 230 porte-clés au total et il en met 10 par coffret.
   230 : 10 = 23. Il peut confectionner 23 coffrets.

   b) Il y a 23 coffrets et 276 cartes postales.
   276 : 23 = 12 Il peut mettre 12 cartes postales dans chaque coffret.

2. a) Utilisons l'algorithme d'Euclide :
   276 = 230 × 1 + 46
   230 = 46 × 5 + 0
   Le PGCD de 276 et 230 est le dernier reste non nul, c'est donc 46.

   b) Le nombre maximal de coffrets que le vendeur peut confectionner est le PGCD de 276 et 230, à savoir 46.

   276 : 46 = 6 et 230 : 46 = 5. Il y a donc 6 cartes postales et de 5 porte-clés par coffret.

Exercice 3

On donne l'expression :

$$G = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(3x + 5)$$

1. $G = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(3x + 5)$
   $G = 4x^2 - 4x + 1 + 6x^2 - 3x + 10x - 5$
   $G = 10x^2 + 3x - 4$

2. $G = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(3x + 5)$
   $G = (2x - 1)(2x - 1) + (2x - 1)(3x + 5)$
   $G = (2x - 1)[(2x - 1) + (3x + 5)]$
   $G = (2x - 1)(5x + 4)$

3. Un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul.
   $(2x - 1)(5x + 4) = 0$ équivaut à $2x - 1 = 0$ ou $5x + 4 = 0$
   C'est-à-dire $x = 0{,}5$ ou $x = 0{,}8$ (on pouvait aussi garder les solutions sous forme fractionnaire)
   L'équation $(2x - 1)(5x + 4) = 0$ admet deux solutions : 0,5 et 0,8.

Exercice 4

1. On choisit 10.
   a) 10 × 3 = 30
   b) 30 + 10² = 30 + 100 = 130
   c) 130 × 2 = 260
   Le résultat est bien 260.

2. le nombre choisi est -5.
   a) -5 × 3 = -15 b) -15 + (-5)² = -15 + 25 = 10 c) 10 × 2 = 20. Le résultat est 20.

   Le nombre choisi est $\frac{2}{3}$.

   a) $\frac{2}{3} \times 3 = 2$ b) $2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 + \frac{4}{9} = \frac{18}{9} + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$ c) $\frac{22}{9} \times 2 = \frac{44}{9}$. Le résultat est $\frac{44}{9}$.

3. x désigne le nombre de départ, le programme de calcul peut se traduire par l'expression suivante :
$A = (3x + x^2) \times 2 = 2\,x\,(3 + x) = 0$

Obtenir 0 comme résultat du programme de calcul revient à résoudre l'équation $2\,x\,(3 + x) = 0$

Un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$2\,x\,(3 + x) = 0$ équivaut à $2x = 0$ ou $3 + x = 0$

C'est-à-dire $x = 0$ ou $x = -3$.

L'équation $(3x + x^2) \times 2 = 0$ admet deux solutions : 0 et -3. Pour obtenir 0, on peut choisir soit 0 soit 3 comme nombre de départ.

PARTIE GEOMETRIQUE (12 points)

Exercice 1 :

1. On sait que les droites (DE) et BC) sont sécantes en O et que les droites (BD) et (CE) sont parallèles.

   D'après le théorème de Thalès : $\frac{OD}{OE} = \frac{OB}{OC} = \frac{BD}{EC}$

   On remplace les longueurs connues par leurs valeurs : $\frac{6}{OE} = \frac{7,2}{10,8} = \frac{BD}{5,1}$

   Donc OE = 6 × 10,8 : 7,2 = 9 OE = 9 cm

   Donc BD = 5,1 × 7,2 : 10,8 = 3,4 BD = 3,4 cm

2. Les points F, O, D et G, O, B sont alignés dans le même ordre.

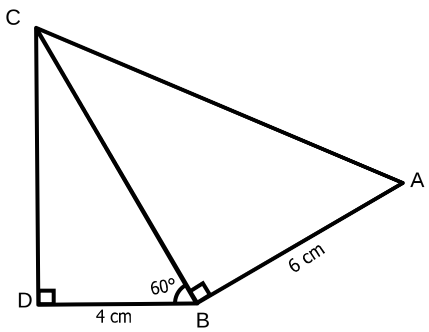
   $\frac{OF}{OD} = \frac{2}{6}$ et $\frac{OG}{OB} = \frac{2,4}{7,2}$

   2 × 7,2 = 14,4 et 6 × 2,4 = 14,4.

   Par conséquent $\boxed{\frac{OF}{OD} = \frac{OG}{OB}}$.

   D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (GF) et (BD) sont parallèles.

Exercice 2



1. Dans le triangle BCD, rectangle en D, $\cos \widehat{DBC} = \frac{DB}{BC}$

   $\cos(60°) = \frac{4}{BC}$, donc $BC = \frac{4}{\cos 60°}$ cm = 8 cm

2. Dans le triangle BCD, rectangle en D, $\tan \widehat{DBC} = \frac{CD}{BD}$

   $\tan(60°) = \frac{CD}{4}$, donc CD = tan (60°) x 4 cm ≈ 6,9 cm

3. Dans le triangle BAC, rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
   $BA^2 + BC^2 = CA^2$
   donc : $CA^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. Alors $CA = \sqrt{100}$ cm = 10 cm

4. Dans le triangle BAC, rectangle en B, $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{BA} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

5. Par conséquent : $\widehat{BAC} \approx 53°$

PROBLEME (12 points)

Première partie

1. ABCD est un losange, donc OA = $\frac{1}{2}$ AC = 3 cm

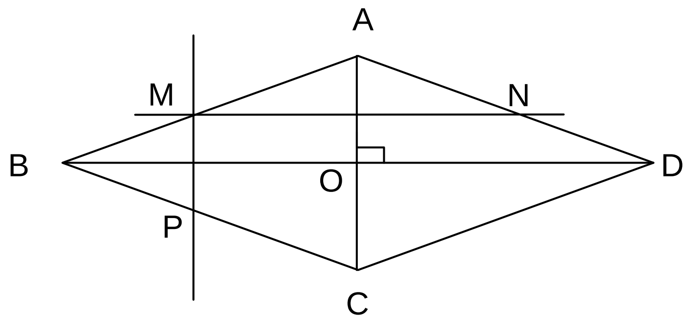
   Le triangle OAB est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore : $BA^2 = OB^2 + OA^2$
   Donc $OB^2 = BA^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$. OB = $\sqrt{16}$ cm = 4 cm

2. Le triangle OAB est rectangle en O, alors $\sin \widehat{ABO} = \frac{OA}{AB} = \frac{3}{5}$. Donc $\widehat{ABO} \approx 37°$

3. Le losange est formé de 4 triangles rectangles identiques à OAB.
   l'aire du losange, notée $\mathcal{A}_{\text{losange}}$ est donc 4 fois celle de OAB, notée $\mathcal{A}_{\text{OAB}}$.

   $\mathcal{A}_{\text{OAB}}$ = OA x BO : 2 = 3 x 4 : 2 cm^2 = 6 cm^2.

   $\mathcal{A}_{\text{losange}}$ = 4 x 6 cm^2 = 24 cm^2



Deuxième partie

1. On suppose que AM = 3.
   On a : BD = 2 OB = 2 x 4 cm = 8 cm et AD = AB = 5 cm, ABCD étant un losange.
   Les droites (BM) et (ND) se coupent en A et les droites (MN) et (BD) sont parallèles.

   D'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{MN}{BD}$ Donc : $\frac{3}{5} = \frac{AN}{5} = \frac{MN}{8}$

   par conséquent : AN = 3 x 5 : 5 cm = 3 cm et MN = 3 x 8 : 5 cm = 4,8 cm
2. On pose AM = x.

Les droites (BM) et (ND) se coupent en A et les droites (MN) et (BD) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{MN}{BD}$. Donc : $\frac{x}{5} = \frac{AN}{5} = \frac{MN}{8}$

Par conséquent MN = $\frac{8x}{5}$ = 1,6 x

Troisième partie

Dans cette partie, on a encore AM = x.

La droite passant par M et parallèle à la droite (AC) coupe le côté [BC] en P.

1. BM = BA – AM = 5 - x
   Les droites (BM) et (BP) se coupent en D et les droites (MP) et (AC) sont parallèles.

   D'après le théorème de Thalès : $\frac{BM}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{MP}{AC}$ Donc : $\frac{5 - x}{5} = \frac{MP}{6}$

   MP = $\frac{6 \times (5 - x)}{5} = \frac{30 - 6x}{5}$ = 6 – 1,2 x

2. Calculer la valeur de x pour laquelle le triangle MNP est isocèle en M.
   MNP est isocèle en M quand MN = MP, c'est-à-dire quand 1,6 x = 6 – 1,2 x
   Résolvons cette équation :

$$1{,}6\,x = 6 - 1{,}2\,x$$
$$1{,}6\,x + 1{,}2\,x = 6 - 1{,}2\,x + 1{,}2\,x$$
$$2{,}8\,x = 6$$
$$x = \frac{6}{2{,}8} \qquad \text{Or } \frac{6}{2{,}8} = \frac{60}{28} = \frac{4 \times 15}{4 \times 7} = \frac{15}{7}$$

La valeur de x pour laquelle le triangle MNP est isocèle en M est $\frac{15}{7}$.